

Examen final

Exercice 1:

Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2 .

Pour $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \in E$, on définit la forme quadratique q par

$$q(A) = \det A = x_1x_4 - x_2x_3.$$

1. Donner sa forme polaire f ainsi que sa matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de E . Quel est le rang de q ?
2. Réduire q par la méthode de Gauss. En déduire sa signature.
3. La forme quadratique q est-elle un produit scalaire sur E ?
4. Déterminer à partir de la question (2) une base orthogonale \mathcal{B} de E .
5. Ecrire la matrice de q dans la base \mathcal{B} .
6. Donner une base du sous-espace vectoriel $F = \{A \in E / \text{tr}(A) = 0\}$ de E .
7. Déterminer l'orthogonal de F pour la forme quadratique q .
8. A t-on $E = F \oplus F^\perp$?

Exercice 2:

Soient a un réel et q la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique \mathcal{E} de \mathbb{R}^3 .

1. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique q est-elle dégénérée?
Donner alors son rang et son noyau.
2. Déterminer, suivant les valeurs de a , une base orthogonale \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 (on pourra déterminer une matrice inversible P telle que tPAP est diagonale).
3. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique q est-elle un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 ?
4. On prend $a = 0$.
 - (i) En utilisant le procédé de Gram-schmidt pour la base \mathcal{E} , trouver une base orthonormée \mathcal{C} pour le produit scalaire q .
 - (ii) Quelle est la matrice de q dans la base \mathcal{C} ?
 - (iii) Soit $v = (1, 2, 3)$ dans \mathcal{E} , écrire $q(v)$ dans la base \mathcal{C} .

Corrigé de l'examen final

Exercice 1:

$E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{E} = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de E , q la forme quadratique sur E définie par $q(A) = \det A = x_1x_4 - x_2x_3$ pour tout $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \in E$.

1. Forme polaire f de q : (1pt)

Pour $A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \in E$ et $A_2 = \begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix} \in E$

$$\begin{aligned} f(A_1, A_2) &= \frac{1}{2} (q(A_1 + A_2) - q(A_1) - q(A_2)) \\ &= \frac{1}{2} (\det(A_1 + A_2) - \det(A_1) - \det(A_2)) \\ &= \frac{1}{2} (x_1y_4 + x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2). \end{aligned}$$

Matrice M de f dans la base \mathcal{E} : (1pt)

$$\begin{aligned} M &= (f(A_i, A_j))_{1 \leq i, j \leq 4} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

M peut être déduite directement de l'expression de la forme polaire f ou de celle de q .

Rang de q : (0,5pt)

$$Rg(q) = rg(M) = 4.$$

2. Réduction de q par la méthode de Gauss: (2pt)

$$q(A) = x_1x_4 - x_2y_3 = 2\left(\frac{1}{2}x_1x_4 - \frac{1}{2}x_2y_3\right)$$

Les coefficients $a_{ii} = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq 4$

Comme $a_{14} = \frac{1}{2} \neq 0$ (a_{14} est le coefficient de x_1x_4), posons

$$\begin{aligned} L_1(A) &= \frac{1}{2} \frac{\partial q(A)}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_4 \\ L_2(A) &= \frac{1}{2} \frac{\partial q(A)}{\partial x_4} = \frac{1}{2} x_1 \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 q(A) &= \frac{1}{2}a_{14}^{-1}((L_1 + L_2)^2 - (L_1 - L_2)^2) + q_1(A) \\
 &= (L_1 + L_2)^2 - (L_1 - L_2)^2 + q_1(A) \\
 &= 4L_1L_2 + q_1(A) \\
 &= x_1x_4 + q_1(A).
 \end{aligned}$$

Par suite $q_1(A) = -x_2x_3 = 2(-\frac{1}{2}x_2x_3)$.

Réduction de q_1 par la méthode de Gauss.

On a $a_{23} = -\frac{1}{2} \neq 0$. Soit alors

$$\begin{aligned}
 L_3(A) &= \frac{1}{2} \frac{\partial q_1(A)}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}x_3 \\
 L_4(A) &= \frac{1}{2} \frac{\partial q_1(A)}{\partial x_3} = -\frac{1}{2}x_2
 \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 q_1(A) &= \frac{1}{2}a_{23}^{-1}((L_3 + L_4)^2 - (L_3 - L_4)^2) + q_2(A) \\
 &= -4L_2L_3 + q_2(A) \\
 &= -x_2x_3 + q_2(A).
 \end{aligned}$$

D'où $q_2(A) = 0$.

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 q(A) &= (L_1 + L_2)^2 - (L_1 - L_2)^2 - (L_3 + L_4)^2 + (L_3 - L_4)^2 \\
 &= L_1'^2(A) - L_2'^2(A) - L_3'^2(A) + L_4'^2(A)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 L_1'(A) &= \frac{1}{2}(x_1 + x_4) \\
 L_2'(A) &= \frac{1}{2}(-x_1 + x_4) \\
 L_3'(A) &= -\frac{1}{2}(x_2 + x_3) \\
 L_4'(A) &= \frac{1}{2}(x_2 - x_4).
 \end{aligned}$$

Signature de q : (0,5pt)

$S(q) = (P, N) = (2, 2)$.

3. Puisque $P = 2 \neq \dim E = 4$ alors q n'est pas définie positive et par conséquent pas un produit scalaire. (0,5pt)

4. Détermination d'une base orthogonale de E à partir de (2): (2pts)

D'après Gauss, les formes linéaires L'_i ($1 \leq i \leq 4$) sont linéairement indépendantes(on le vérifie aisément) elles forment une base $\mathcal{B}^* = \{L'_1, L'_2, L'_3, L'_4\}$ du dual E^* de E . Soit $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ la base de E dont la duale est \mathcal{B}^* . On a $L'_i(M_j) = \delta_{ij}$. \mathcal{B} est donc une base orthogonale de E par rapport à la FBS f .

Détermination de $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$:

M_1 est solution de système $L'_i(M_1) = \delta_{i1}$. D'où

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x_1 + x_4) = 1 \\ \frac{1}{2}(-x_1 + x_4) = 0 \\ -\frac{1}{2}(x_2 + x_3) = 0 \\ \frac{1}{2}(x_2 - x_4) = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

De manière analogue, on obtient $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Matrice N de q dans la base \mathcal{B} : (0,5pt)

D'après (4)

$$\begin{aligned} N &= (f(M_i, M_j))_{1 \leq i, j \leq 4} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. Une base du s.e.v. $F = \{A \in E / \text{tr}(A) = 0\}$. (0,5pt)

$$\begin{aligned} F &= \left\{ A = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \in E / x_1 + x_4 = 0 \right\} \\ &= \left\{ A = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix} / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \langle A_1 - A_4, A_2, A_3 \rangle. \end{aligned}$$

$\{A_1 - A_4, A_2, A_3\}$ est une base de F et $\dim F = 3$.

7. Détermination de F^\perp : (1pt)

Par définition $F^\perp = \{A \in E / f(A, B) = 0 \quad \forall B \in F\}$.

Puisqu'on connaît une partie génératrice de F alors

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{A \in E / f(A, A_1 - A_4) = 0, f(A, A_2) = 0, f(A, A_3) = 0\} \\ &= \left\{ A = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \in E / -x_1 + x_4 = 0, -x_3 = 0, -x_2 = 0 \right\} \\ &= \langle I_2 \rangle = \langle A_1 + A_4 \rangle. \end{aligned}$$

8. $F + F^\perp = \langle A_1 - A_4, A_2, A_3, A_1 + A_4 \rangle$. Les matrices $A_1 - A_4, A_2, A_3, A_1 + A_4$ étant linéairement indépendantes, on déduit que $\dim(F + F^\perp) = 4 = \dim E$. D'où $E = F + F^\perp$.

De la relation $\dim(F + F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap F^\perp)$ on tire $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

Il s'ensuit $E = F \oplus F^\perp$. (1pt)

Exercice 2:

Soient a un réel et q la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique \mathcal{E} de \mathbb{R}^3 .

1. Conditions sur a pour que q soit dégénérée: (1pt)

$$\begin{aligned}
 q \text{ dégénérée} &\Leftrightarrow \operatorname{rg}(q) < \dim \mathbb{R}^3 \\
 &\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) < 3 \\
 &\Leftrightarrow \det(A) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow a = 1
 \end{aligned}$$

Pour $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 par suite $\operatorname{rg}(q) = \operatorname{rg}(A) = 2$ (0,5pt)
 et le noyau de q est

$$\begin{aligned}
 N(q) &= \ker A \\
 &= \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = 0\} \\
 &= \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 2y = 0 \text{ et } z = 0\} \\
 &= \langle (1, -1, 0) \rangle. \text{ (1pt)}
 \end{aligned}$$

2. Une base orthogonale \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 : (2pt)

Déterminons une matrice inversible P telle que tPAP soit diagonale.

On considère le bloc $(A|I)$. On effectue l'opération $2L_2 - (a+1)L_1$ sur la deuxième ligne de $(A|I)$ puis $2C_2 - (a+1)C_1$ sur la 2^{ème} colonne de A (avec la condition $a \neq -1$).

$$(A|I) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & a+1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a-1)^2 & 0 & -(a+1) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2(a-1)^2 & 0 & -(a+1) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La matrice à droite du dernier bloc représente la transposée de la matrice P cherchée, qui est évidemment inversible.

Considérons la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (-(a+1), 2, 0), (0, 0, 1)\} = \{e_1, -(a+1)e_1 + 2e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 .

\mathcal{B} est une base orthogonale de \mathbb{R}^3 relativement à laquelle la matrice de q est la matrice diagonale

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(a-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(a+1) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base \mathcal{E} à la base \mathcal{B} .

Si $a = -1$ alors $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonale donc $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \mathcal{E}$ est orthogonale.

3. valeurs de a pour lesquelles q est un produit scalaire: (1pt)

D'après la question (2) la signature de q est

$$(P, N) = \begin{cases} (2, 0) & \text{si } a = 1 \\ (3, 0) & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
 q \text{ produit scalaire} &\Leftrightarrow P = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \\
 &\Leftrightarrow a \neq 1.
 \end{aligned}$$

4. On prend, dans toute la suite, $a = 0$.

(i). Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour la base \mathcal{E} : (1,5pts)

Nous avons besoin de l'expression de la forme quadratique q et de celle de sa forme polaire f . (1pt)

Puisque $a = 0$ alors $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On déduit que pour $X = [X]_{\mathcal{E}} = (x_1, x_2, x_2)$ et $Y = [Y]_{\mathcal{E}} = (y_1, y_2, y_2) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ q(X) &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{C} = \{u_1, u_2, u_3\}$ la base orthonormée de \mathbb{R}^3 obtenue à partir de \mathcal{E} .

prenons $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}, u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$

avec $w_2 = e_2 - f(e_2, u_1)u_1$ et $w_3 = e_3 - f(e_3, u_1)u_1 - f(e_3, u_2)u_2$.

Comme $f(e_2, u_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}f(e_2, e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, f(e_3, u_1) = 0$ et $f(e_3, u_2) = 0$ alors

$w_2 = e_2 - \frac{1}{2}e_1 = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$ et $w_3 = e_3$.

Par suite $\|e_1\| = \sqrt{q(e_1)} = \sqrt{2}, \|w_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\|w_3\| = 1$.

On déduit que

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \\ u_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + 2e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 2, 0) \\ u_3 &= e_3 = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

(ii) Matrice A'' de q dans la base \mathcal{C} : (1pt)

$\mathcal{C} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est orthonormée signifie que $f(u_i, u_j) = \delta_{ij}$. Par conséquent, la matrice de q dans la base \mathcal{C} est

$$\begin{aligned} A'' &= (f(u_i, u_j))_{ij} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_3. \end{aligned}$$

(iii) $q(v)$ dans la base \mathcal{C} avec $v = [v]_{\mathcal{E}} = (1, 2, 3)$: (1pt)

Posons $v = [v]_{\mathcal{C}} = (x_1, x_2, x_3)$.

D'après la question précédente $q(v) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (q(v) \text{ dans la base } \mathcal{C})$.

Pour déterminer $q(v)$ il suffit juste de connaître x_1, x_2, x_3 .

Soit $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base \mathcal{E} à la base \mathcal{C} . Nous savons que

$[v]_{\mathcal{E}} = Q [v]_{\mathcal{C}}$ donc $[v]_{\mathcal{C}} = Q^{-1} [v]_{\mathcal{E}}$ ie

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

par suite $q(v) = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2 = 19$.