

Examen Final : Algèbre 2

Durée 1h30 min

Exercice 1 (12 pts).

I. Soient E et F deux \mathbb{K} espaces vectoriels et f une application de E dans F .

1. Rappeler la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire: $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Donner la définition de la somme directe de deux sous espaces vectoriels E_1, E_2 d'un espace vectoriel E .
3. Qu'est-ce qu'une combinaison linéaire de deux vecteurs u, v d'un espace vectoriel sur corps \mathbb{K} .

II. On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Soit f l'application linéaire définie par

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ -x + 3y - z \\ -2x + 4y - z \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de f , donner une base de $\ker f$.
2. Déterminer le rang de f .
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ n'est pas libre.
4. Déterminer une sous famille de \mathcal{B} qui soit libre, écrire les autres vecteurs en fonction de ceux ci.
5. Donner une base de $\operatorname{Im} f$. et f Est-elle injective? Est-elle surjective?, Bijective?.
6. f est-elle un isomorphisme de \mathbb{R}^3 sur \mathbb{R}^3 .
7. Soient $u_1(1, 1, 1)$, $u_2(1, 2, 3)$ et $u_3(1, 1, 2)$ des vecteurs de \mathbb{R}^3 .
 - (a) Montrer que $\mathcal{C} = \{u_1(1, 1, 1), u_2(1, 2, 3), u_3(1, 1, 2)\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{C} .

Exercice 2 (08 pts). On considère le système suivant:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + 6y - az = 2 \\ x - z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

1. Écrire le système (S) sous la forme matricielle $AX = b$. Avec $X = (x, y, z)$.
2. Pour quelle valeur de a la matrice A du système (S) soit régulière. Avec $a \in \mathbb{R}$.
3. Si $a = 4$
 - (a) Trouver l'inverse de A .
 - (b) Résoudre le système (S) .

BONNE CHANCE

Exercice 01 (12pts)

Soit $f: E \longrightarrow F$

$u \longmapsto f(u) = v \quad \text{car } u \in E \text{ et } v \in F$

1/ définition du noyau: ($\text{Ker } f$)

$\text{Ker } f = \{ u \in E : f(u) = 0_F \}$ en plus l'image inverse $f^{-1}(\{0_F\})$.

définition de l'image: ($\text{Im } f$)

$\text{Im } f = \{ f(u) \in F : u \in E \}$.

2/ définition de la somme directe de deux espaces vectoriels E_1 et E_2
car E_1 et E_2 dans E .

- La somme de E_1 et E_2 qui s'écrit $E_1 + E_2$ est l'ensemble
constitué de toutes les sommes $u+v$ avec $u \in E_1$ et $v \in E_2$
 $E_1 + E_2 = \{ u+v : u \in E_1 \text{ et } v \in E_2 \}$.

3/ une combinaison linéaire deux vecteurs u, v s'écrit dans
la forme $\alpha u + \beta v$ tel que $\alpha, \beta \in \mathbb{K} (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

II/ Soit: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2y - z \\ -x + 3y - z \\ -2x + 4y - z \end{pmatrix}$

L moyen: $\text{Ker } f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0, 0) \}$

$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2y - z \\ -x + 3y - z \\ -2x + 4y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

On obtient donc;

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ -2x + 4y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}; \\ x = x \\ y = x \\ z = 2x \end{cases}$$

$$\text{d'où } \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- La partie génératrice de $\ker f$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est libre donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\ker f$ et

$$\dim \ker f = 1$$

2/ le rang de f :

En utilisant le théorème du rang on a $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$

$$\text{en plus } \dim \mathbb{R}^3 = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f)$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Im } f) = \text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f$$

$$= 3 - 1 = 2$$

$$\text{rg}(f) = 2$$

3/ soit la famille $B = \{f(e_1), f(e_2) \text{ et } f(e_3)\}$.

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vérifions si $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est libre ?

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \text{ et } \alpha_3 \in \mathbb{R};$$

$$\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \alpha_3 f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 ?$$

$$\text{On a, } \begin{cases} 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Après résolution de ce système on trouve.

$$\forall \alpha_1 \in \mathbb{R}; \quad \alpha_1 = \alpha_2 \text{ et } \alpha_3 = 2\alpha_1$$

d'où $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ n'est pas libre. D'où 01.
 $(\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \alpha_3 f(e_3) = (0, 0, 0))$

4/ pour déterminer une sous famille de B .

En utilisant la solution du système de la question 3

(*) f $f(e_1) = -f(e_2) - 2f(e_3)$ (par exemple). 01

5/ La base de $\text{Im } f$ est ?

$\text{Im } f = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

soit la famille $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est une partie génératrice de $\text{Im } f$ en plus

$\{f(e_1), f(e_2)\}$ est libre (par exemple)

d'où $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une base de $\text{Im } f$. 01

* L'application f n'est pas injective car $\text{Ker } f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
 * " " n'est pas surjective car $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$
 $\dim(\text{Im } f) \neq \dim \mathbb{R}^3$ 01

d'où f n'est pas bijective.

6/ f est-elle un isomorphisme de \mathbb{R}^3 sur \mathbb{R}^3 ?

par définition f est un isomorphisme ssi $\begin{cases} \text{i) } f \text{ Application linéaire} \\ \text{ii) } f \text{ bijective} \end{cases}$

d'où f n'est un isomorphisme car f n'est pas bijective. 01

7. Soit $u_1(1,1,1)$, $u_2(1,2,3)$ et $u_3(1,1,2)$

a) $\mathcal{C} = \{u_1(1,1,1), u_2(1,2,3), u_3(1,1,2)\}$ est une base de \mathbb{R}^3

On a, $\dim \mathbb{R}^3 = \text{card}(\mathcal{C}) = 3$.

• Montrer que \mathcal{C} est une partie génératrice de \mathbb{R}^3 .

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$$

Après résolution de ce système on trouve:

méth. 1

$$\begin{cases} \alpha = x + y - z \\ \beta = y - x \\ \gamma = x - 2y + z \end{cases} \quad \text{d'où } \mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3$$

méth. 2 - soit $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ partie
génératrice de \mathbb{R}^3 .

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (1) \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 & (2) \\ \alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

(2) - (1) $\Rightarrow \beta = 0$ en plus

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 & (4) \\ \alpha + \gamma = 0 & (5) \\ \alpha + 2\gamma = 0 & (6) \end{cases}$$

La famille \mathcal{C} est libre
d'où \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^3 .



b) La matrice de f dans la base \mathcal{C} ;

On a: $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$, $f(u_3) = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 = (0, 0, 0)$

On obtient la matrice

$$M(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice N° 02 (8pts), soit $(S) \begin{cases} 2x + 6y - az = 2 \\ x - z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$

1/ La forme matricielle: $AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & -a \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -a \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2/ Le système (S) est régulier car A est régulière.

A est régulière si et seulement si $\det(A) \neq 0$

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 & -a \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow 4 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow 2(2-a) \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$

$a \in \mathbb{R} - \{2\}$ La matrice A est régulière.

$$3/ \text{ n: } a=4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) L'inverse de A: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}^t(A)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0+2) - 6(1-1) - 4(2-0)$$

$$= 4 - 0 - 8 = -4 \neq 0$$

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -14 & -2 & -10 \\ -6 & -2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Com}^t(A) = \begin{pmatrix} 2 & -14 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -10 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}^t(A) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -14 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -10 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

b/ pour résoudre le système (S): $AX=b$

A^{-1} existe $\Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b \Rightarrow X = A^{-1}b$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

