أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2009

التمرين الأول :

1 أ

لدينا الفلكة $(\mathcal{S})$ مركزها $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها 3 .

إذن معادلتها الديكارتية تكتب على الشكل :

$$(\mathcal{S}) : (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=3^2$$

يعني : $(\mathcal{S}) : x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$

من جهة ثانية لدينا : $A(2;2;-1)$.

نلاحظ أن : $2^2+2^2+(-1)^2-2(2)-2(-1)-7=0$

إذن : $A\epsilon(\mathcal{S})$

1 ب

لدينا : $\Omega(1,0,1)$ و $(\mathcal{P}) : 2x+y+2z-13=0$

إذن : $d(\Omega,(\mathcal{P}))=\dfrac{|2\times1+0+2\times1-13|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=3$

حصلنا إذن على : $d(\Omega,(\mathcal{P}))=3=Rayon(\mathcal{S})$

و هذا يعني أن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$.

2 أ

لدينا (D) مستقيم عمودي على المستوى $(\mathcal{P})$

إذن : كل متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$ تكون موجهة للمستقيم (D) .

لدينا : $(\mathcal{P}) : 2x+y+2z-13=0$

إذن : المتجهة $\vec{u}(2;1;2)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.

و بالتالي : $\vec{u}(2;1;2)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) .

و لدينا : $\Omega(1,0,1)$ و $A(2,2,-1)$. إذن : $\overrightarrow{\Omega A}(1,2,-2)$

و منه :

$$\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\-2&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=6\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}$$

و بالتالي : $(6;-6;-3)$ هو مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$.

2 ب

لدينا : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=(6;-1,-3)$

إذن : $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{6^2+(-6)^2+(-3)^2}=\sqrt{81}=9$

و لدينا كذلك : $\vec{u}(2,1,2)$

إذن : $\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

و بالتالي : $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{9}{3}=3$

من جهة أخرى لدينا A نقطة من $(\mathcal{S})$. إذن : $\Omega A=3$

و منه : $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\Omega A$ يعني : $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\|\overrightarrow{\Omega A}\|$

يعني : $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\|\overrightarrow{\Omega A}\|\cdot\|\vec{u}\|$

أي : $\|\overrightarrow{\Omega A}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\sin\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\vec{u}}\right)=\|\overrightarrow{\Omega A}\|\cdot\|\vec{u}\|$

يعني : $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\vec{u}}\right)=1$ أي : $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\vec{u}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

و هذا يعني أن المتجهتان $\vec{u}$ و $\overrightarrow{\Omega A}$ متعامدتان .

و بما أن $\vec{u}$ متجهة موجهة للمستقيم (D) فإن : $(D)\perp(\Omega A)$

نلاحظ إذن أن المستقيم (D) مار من إحدى نقط الفلكة $(\mathcal{S})$ و هي النقطة A

و عمودي على حامل الشعاع ΩA .

إذن : المستقيم (D) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في النقطة A .

التمرين الثاني :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-6z+25=0$

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4(25)=-64=(8i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين كما يلي :

$$z_1=\frac{6-8i}{2}=3-4i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{6+8i}{2}=3+4i$$

2 أ

$$\frac{d-c}{a-c}=\frac{(5+6i)-(2+3i)}{(3+4i)-(2+3i)}=\frac{3+3i}{1+i}=\frac{3(1+i)}{(1+i)}=3$$

إذن : $\dfrac{d-c}{a-c}=3$

يعني : $\arg\left(\dfrac{d-c}{a-c}\right)\equiv0\ [2\pi]$ أي : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right)\equiv0\ [2\pi]$

و هذا يعني أن النقط A و D و C مستقيمية

ملاحظة : توجد طريقة أخرى أسهل مما سبق ذكره في الإجابة و هي :

ننطلق من النتيجة $\dfrac{d-c}{a-c}=3$ إذن : $(d-c)=3(a-c)$.

هذه الكتابة العقدية تكافئ باستعمال المتجهات : $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CA}$

و هذا يعني أن النقط A و D و C نقط مستقيمية .

2 ب

لدينا h تحاكي مركزه النقطة B و نسبته $\frac{3}{2}$.

يعني أن h تطبيق معرف بما يلي :

$$\begin{aligned} h : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) &\mapsto M'(z') \\ z &\mapsto z'=\tfrac{3}{2}(z-b)+b \end{aligned}$$

ليكن $p=aff(P)$ و ننطلق من الكتابة $h(A)=P$.

إذن حسب تعريف التحاكي h : $aff(P)=\frac{3}{2}(aff(A)-b)+b$

أي : $p=\frac{3}{2}(a-b)+b$ يعني : $p=\frac{3}{2}(3+4i-3+4i)+3-4i$

أي : $p=\frac{3}{2}(8i)+3-4i$ أي : $p=3+8i$

2 ج

لدينا :

$$\frac{d-p}{a-p}=\frac{(5+6i)-(3+8i)}{(3+4i)-(3+8i)}=\frac{2-2i}{-4i}=\frac{i-1}{2i}$$

$$=\frac{i(i-1)}{2\,i\,i}=\frac{-1}{2}(-i-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

إذن : $\dfrac{d-p}{a-p}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و منه : $\left|\dfrac{d-p}{a-p}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

يكفي الآن أن نبحث عن θ بحيث : $\dfrac{d-p}{a-p}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}$

ننطلق إذن من الكتابة : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

www.baclive.blogspot.com

التي تصبح : $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

يعني : $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}\end{cases}$ أي : $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$ إذن : $\theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

نستنتج إذن : $\frac{d-p}{a-p} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

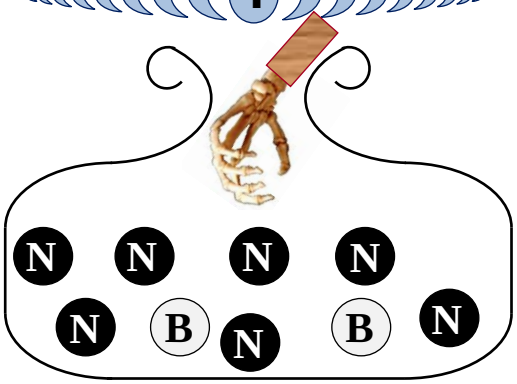
و من هذه النتيجة نستنتج أن : $\begin{cases}\left|\frac{d-p}{a-p}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \arg\left(\frac{d-p}{a-p}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}\left|\frac{d-p}{a-p}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \left(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}\sqrt{2}|d-p| = |a-p|\\ \left(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\end{cases}$

و بالتالي : $\begin{cases}PA = \sqrt{2}\,PD\\ \left(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\end{cases}$

التمرين الثالث :

1



عندما نسحب عشوائيا و بالتتابع و بدون إحلال كرتين من صندوق يحتوي على تسع كرات فإنه توجد :

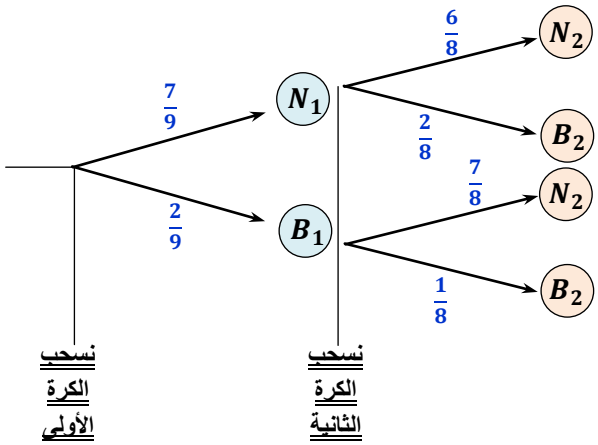
- C_9^1 إمكانية لسحب الكرة الأولى .
- C_9^1 إمكانية لسحب الكرة الثانية .

إذن : $card(\Omega) = C_9^1 \times C_8^1 = 72$

بحيث : Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة (يعني سحب الكرتين بالتتابع و بدون إحلال) بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق بعد السحب .

و نحول التجربة العشوائية إلى شجرة الاحتمالات التالية .



نلاحظ من خلال هذه الشجرة أن تجربتنا العشوائية تحتمل ثلاث نتائج ممكنة و هي :

- إما الحصول على كرتين سوداوين .
- أو الحصول على كرة سوداء و الأخرى بيضاء .
- أو الحصول على كرتين بيضاوين .

في الحالة الأولى تبقى كرتين بيضاوين في الصندوق

في الحالة الثانية تبقى كرة بيضاء واحدة في الصندوق

في الحالة الثالثة تكون الكرات المتبقية في الصندوق كلها سوداء .

إذن المتغير العشوائي X يأخذ ثلاث قيم ممكنة و هي : 0 أو 1 أو 2 .

أو بتعبير آخر نكتب : $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

2

$$p[X=0] = p\left(\text{الكرات المتبقية في الصندوق كلها سوداء}\right)$$
$$= p\left(\text{الكرة الأولى المسحوبة بيضاء} \quad و \quad \text{الكرة الثانية المسحوبة بيضاء}\right)$$
$$= \frac{C_2^1 \times C_1^1}{card(\Omega)} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$$

$$p[X=1] = p\left(\text{نسحب كرة بيضاء و أخرى سوداء}\right)$$
$$= p\left(\text{الأولى بيضاء و الثانية سوداء} \quad أو \quad \text{الأولى سوداء و الثانية بيضاء}\right)$$
$$= p\left(\text{الأولى بيضاء و الثانية سوداء}\right) + p\left(\text{الأولى سوداء و الثانية بيضاء}\right)$$
$$= \frac{C_2^1 \times C_7^1}{72} + \frac{C_2^1 \times C_2^1}{72} = \frac{14}{72} + \frac{14}{72} = \frac{28}{72} = \frac{7}{18}$$

و يمكن أن نجيب بكل بساطة على هذا السؤال بطريقة ثانية :

و سوف نستعمل فيها شجرة الاحتمالات السابقة .

لدينا : $p[X=0] = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{36}$

و لدينا : $p[X=1] = p(N_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap N_2) = \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{14}{72} + \frac{14}{72} = \frac{7}{18}$

3

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$P_X : \{0;1;2\} \longmapsto [0,1]$$
$$k \longmapsto P_X(k) = p[X=k]$$

أو بتعبير آخر يجب تحديد احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشائي X .

لدينا حسب الأسئلة السابقة : $p[X=1] = \frac{7}{18}$ و $p[X=0] = \frac{1}{36}$.

يكفي الآن تحديد الاحتمال : $p[X=2]$. و من أجل ذلك أقترح طريقتين :

www.baclive.blogspot.com

الطريقة الأولى :

نعلم أن : $p[X=0]+p[X=1]+p[X=2]=1$

إذن : $p[X=2]=1-p[X=0]-p[X=1]$

$$=1-\frac{1}{36}-\frac{7}{18}=\frac{7}{18}$$

الطريقة الثانية : استعمال شجرة الاحتمالات السابقة .

$$p[X=2]=p(N_1\cap N_2)=p(N_1)\times p_{N_1}(N_2)$$

$$=\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}=\frac{42}{72}=\frac{7}{12}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بـ :

$$P_X\ :\ \{0;1;2\}\ \longmapsto\ [0,1]$$

$$0\ \longmapsto\ P_X(0)=p[X=0]=\frac{1}{36}$$

$$1\ \longmapsto\ P_X(1)=p[X=1]=\frac{7}{18}$$

$$2\ \longmapsto\ P_X(2)=p[X=2]=\frac{7}{12}$$

و منه : نحسب الأمل الرياضي $E[X]$ كما يلي :

$$E[X]=\sum_i x_i\cdot p[X=x_i]=\sum_{k=0}^{k=2}k\cdot p[X=k]$$

$$=0\cdot p[X=0]+1\cdot p[X=1]+2\cdot p[X=2]$$

$$=\left(0\times\frac{1}{36}\right)+\left(1\times\frac{7}{18}\right)+\left(2\times\frac{7}{12}\right)=\frac{14}{9}$$

التمرين الرابع :

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا . لدينا :

$$1-u_{n+1}=1-\frac{1+4u_n}{7-2u_n}=\frac{(7-2u_n)}{(7-2u_n)}-\frac{(1+4u_n)}{(7-2u_n)}$$

$$=\frac{6-6u_n}{7-2u_n}=\frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1-u_{n+1}=\dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$

لنبين صحة العبارة التالية : $(P_n):\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1-u_n>0$

لدينا : $1-0>0$ إذن : $1-u_0>0$

و هذا يعني أن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1-u_n>0$

إذن : $(1-u_n)$ كمية موجبة قطعا .

و منه : $6(1-u_n)$ و $5+2(1-u_n)$ كميتان موجبتان قطعا .

يعني : $\frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ كمية موجبة قطعا لأنها خارج كميتين موجبتين قطعا .

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}>0$

و منه : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1-u_{n+1}>0$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

حصلنا إذن على الأشياء التالية : $\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\(P_n)\ \Longrightarrow\ (P_{n+1})\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\end{cases}$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع فإن العبارة (P_n) دائما صحيحة .

أو بتعبير آخر : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1-u_n>0$

2 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا :

$$v_{n+1}=\frac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{2(1+4u_n)}{(7-2u_n)}-1}{\dfrac{(1+4u_n)}{(7-2u_n)}-1}$$

$$=\frac{2(1+4u_n)-(7-2u_n)}{(1+4u_n)-(7-2u_n)}=\frac{5}{6}\left(\frac{2u_n-1}{u_n-1}\right)=\frac{5}{6}v_n$$

نحصل إذن على النتيجة التالية : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1}=\frac{5}{6}v_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ هندسية و أساسها $\frac{5}{6}$.

إذن الحد العام لهذه المتتالية هو : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n=v_0\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-0}$

و لدينا : $v_0=\dfrac{2u_0-1}{u_0-1}=\dfrac{-1}{-1}=1$

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$

2 ب

ليكن $n\ \epsilon\ \mathbb{N}$. لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n=\dfrac{2u_n-1}{u_n-1}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \left(\frac{5}{6}\right)^n(u_n-1)=2u_n-1$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \left(\frac{5}{6}\right)^n u_n-\left(\frac{5}{6}\right)^n=2u_n-1$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n-2\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^n-1$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n=\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}$

نلاحظ أن $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{6}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty}u_n=\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}\right)=\left(\dfrac{0-1}{0-2}\right)=\dfrac{1}{2}$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty}u_n=\dfrac{1}{2}$

التمرين الخامس :

1

لدينا : $((x^2-1)^{2010})'=2010(2x)(x^2-1)^{2009}$

إذن : $\int((x^2-1)^{2010})'\,dx=\int 2010(2x)(x^2-1)^{2009}\,dx$

يعني : $(x^2-1)^{2010}=\int 2010(2x)(x^2-1)^{2009}\,dx$

www.baclive.blogspot.com

أي : $\frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010} = \int (2x)(x^2-1)^{2009}\,dx$

إذن : $x \mapsto \frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010}$ دالة أصلية لِـ $x \mapsto 2x(x^2-1)^{2009}$

و لدينا : $\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009}\,dx = \left[\frac{(x^2-1)^{2010}}{2010}\right]_1^{\sqrt{2}}$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}^2-1\right)^{2010}}{2010} - \frac{(1-1)^{2010}}{2010} = \frac{1}{2010}$$

2

لدينا : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\,dx$

$$= [(x^2+x)\ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 \left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)dx$$

$$= (6\ln 3 - 0) - \int_0^2 \frac{x(x+1)}{(x+1)}\,dx$$

$$= (6\ln 3 - 0) - \int_0^2 x\,dx$$

$$= 6\ln 3 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 6\ln 3 - (2-0)$$

$$= 6\ln 3 - 2$$

التمرين السادس :

1 أ

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-e^0}{e^{2x}+e^0}\right)$

يعني : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-e^{2x}\,e^{-2x}}{e^{2x}+e^{2x}\,e^{-2x}}\right)$

أي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})}\right)$

و بالتالي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

1 ب

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا : $f(-x) = (-x)\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right)$

يعني : $f(-x) = (x)\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

و منه حسب نتيجة 1) أ) : $f(-x) = (x)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) = f(x)$

حصلنا إذن على ما يلي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(-x) = f(x)$

إذن f دالة زوجية على $\mathbb{R}$ و تمثيلها المبياني متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

و لدينا : $f(x) - x = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) - x$

$$= x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} - 1\right) = x\left(\frac{1-e^{-2x}-(1+e^{-2x})}{1+e^{-2x}}\right)$$

$$= x\left(\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = \left(\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

1 ج

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

$$= (+\infty)\left(\frac{1-e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}}\right) = (+\infty)\left(\frac{1-0}{1+0}\right) = (+\infty)$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = \lim_{\substack{u\to-\infty \\ u=-2x}}\left(\frac{ue^u}{1+e^u}\right)$

$$= \lim_{u\to-\infty}\left(\underbrace{ue^u}_{0^-}\right)\left(\frac{1}{1+\underbrace{e^u}_{0^+}}\right) = 0\times 1 = 0$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = 0$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

$$= \left(\frac{1-e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}}\right) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$

من النتائج السابقة نحصل على ما يلي :

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-1x) = 0 \end{cases}$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 1x + 0$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$. أي : $(D) : y = x$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$

2

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ، ندرس إشارة الفرق $(f(x)-x)$.

لدينا حسب السؤال 1) أ) : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

نعلم أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^{-2x} > 0$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ 1+e^{-2x} > 1 > 0$

و منه : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} > 0$

أي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} < 0$

www.baclive.blogspot.com

إذن إشارة الفرق $(f(x)-x)$ تتعلق فقط بإشارة x .

إذا كان $x \geq 0$ فإن $f(x)-x \leq 0$

إذا كان $x \leq 0$ فإن $f(x)-x \geq 0$

و نلخص ما حصلنا عليه في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C})$ و (D)	$(\mathscr{C})$ يوجد فوق (D)	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C})$ يوجد أسفل (D)

و بالتالي $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل المستقيم (D) على المجال $[0;+\infty[$.

3 أ

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}\right)$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \left(\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}\right) + x\left(\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}\right)'$

$$= \left(\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}\right) + x\left(\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(1+e^{2x})^2}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}\right) + x\left(\frac{4xe^{2x}}{(1+e^{2x})^2}\right)$$

$$= \frac{(e^{2x}+1)(e^{2x}-1)+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

و منه : $f'(0) = \frac{e^0-1+4\times 0\times e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{1-1+0}{1} = 0$

أي : $f'(0)=0$. و مدلول هذه النتيجة مبيانيا هو أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا أفقياً في النقطة ذات الأفصول صفر .

3 ب

ليكن x عنصرا من المجال $[0;+\infty[$. إذن : $x \geq 0$

و منه : $4x \geq 0$ أي : $e^{4x} \geq e^0$

يعني : $e^{4x} \geq 1$ يعني : $e^{4x}-1 \geq 0$

و بالتالي : $\forall\, x \,\epsilon\, [0;+\infty[\ ;\ e^{4x}-1 \geq 0$

و هذا يعني أن الكمية $(e^{4x}-1)$ كمية موجبة على المجال $[0;+\infty[$.

و نعلم كذلك أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ 4xe^{2x} \geq 0$.

يعني أن $4xe^{2x}$ كمية موجبة كذلك على المجال $[0;+\infty[$.

إذن : $(e^{4x}-1+4xe^{2x})$ كمية موجبة على $[0;+\infty[$.

و بالتالي : $(\forall x \geq 0)\ ;\ e^{4x}-1+4xe^{2x} \geq 0$

إذن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \geq 0$

أي : $(\forall x \geq 0)\ ;\ f'(x) \geq 0$

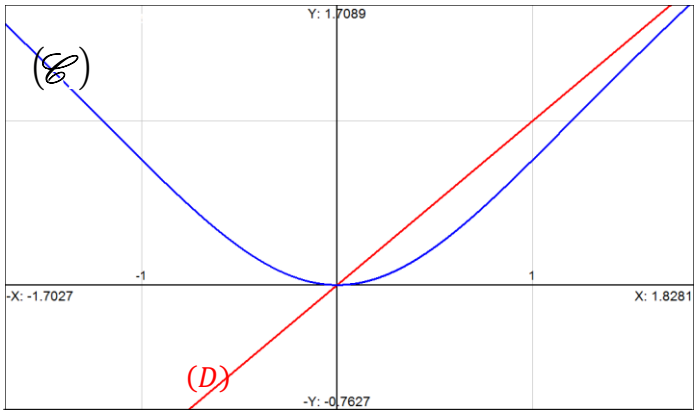
و هذا يعني أن الدالة f دالة تزايدية على المجال $[0;+\infty[$.

3 ج

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	0 ↗	$+\infty$

ملاحظة : لقد تَمَّ الإقتصار على دراسة الدالة f فقط على المجال $[0;+\infty[$ لأن الدالة f دالة زوجية و منحناها متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

4



www.baclive.blogspot.com